|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Limites |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de limite de una función es la base sobre la que se construye el calculo, prueba de ello es que como se vera más adelante la derivada y la integral principales objetos de estudio del cálculo, resultan por definición ser limites. |

[SECCIÓN 1]**1Noción intuitiva de Limite**

La idea de límite formulada en las matemáticas nos ofrece muchas posibilidades para el análisis de situaciones relacionadas con economía, aspectos ambientales o físicos. Esto porque el concepto de límite permite hacer proyecciones sobre el comportamiento de fenómenos que requieren ser analizados a largo plazo, teniendo una función como modelo que caracterice su forma de comportamiento a través de ciertas variables. Además es útil para comprender el comportamiento de un fenómeno cuando la variable independiente del fenómeno, se aproxima a un valor determinado, lo que describe una característica particular y relevante para el fenómeno.

La palabra limite viene etimológicamente hablando, del latín “limes”, que puede traducirse como “frontera o borde”, en matemáticas, la palabra limite no necesariamente indica que se esta estableciendo una división entre dos objetos, cuando se estudian los limites, interesa el concepto de proximidad de “acercarnos a” dicho borde o frontera tanto lo más posible sin llegar tocar el borde, este concepto encierra el manejo de dos grandes ideas de la humanidad, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_CO\_REC10 |
| **Título** | Infinitamente grande o infinitamente pequeño |
| **Descripción** | Interactivo en el que se pretende que el estudiante reconozca que gracias a a densidad y la propiedad arquimediana de los números reales es posibleencontrar valores en valor abasoluto tan pequeños o grandes como se quiera. |

[SECCIÓN 2] 1.1 Limites de una función en un punto

Cuando se piensa en calcular el imite de una función en un número real determinado , no se esta interesado en conocer la imagen que tiene por la función (es más es posible que la imagen de no exista), sino cual es el compartimiento de las imágenes al tomar valores tan próximos como se quieran a , (esto es que la distancia que hay de esos valores a sea infinitamente pequeña).

Si se consideran las funciones:

solo esta definida en cero, sin embargo, en todas es posible tomar valores en el dominio de la función muy cerca de cero tanto por derecha (valores próximos a cero pero mayores) como por izquierda (valores próximos a cero pero menores), lo que permite inspeccionar el comportamiento de las imágenes de estos valores.

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que al acercarnos a cero por la derecha o por la izquierda las imágenes toman valores positivos cada vez más cercanos a . Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se aproximan a |

Para el caso de , cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que las imágenes no se aproximen a ningún valor ni por derecha ni por izquierda, oscila de creciente a decreciente sin acerarse a un valor especifico. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes oscialan entre y y no se aproximan a un valor especfico. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes es muy grande y cada vez se hace más grande, es decir las imágenes se hacen infinitamente más grandes. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se hacen infinitamene grandes. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes es muy grande en valor absoluto y cada vez se hace más grande, es decir las imágenes aunque negativas se hacen infinitamente más grandes en valor absoluto. Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes son negativas pero su valor absoluto se hace infinitamene grande. |

Para el caso de cuando tomamos valores muy próximos a cero se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que cuando nos acercamos por derecha o por izquierda el valor de las imágenes se aproxima a además en este caso . Este comportamiento puede verse reflejado en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes se aproximan a |

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, el comportamiento de las imágenes de una función valores cercano a un número real dado no siempre es el mismo, a veces se aproximan a un valor, otras veces se hacen infinitamente grandes o simplemente no se ve ninguna tendencia, estas ideas caracterizan la noción intuitiva de limite.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a derecha e izquierda de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a de las imágenes por la función , **no existe**. |

En los ejemplos anteriores se tendría que:

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | Limites por tabulación o grafica. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Puntos de acumulación |
| **Descripción** | Interactivo en que se estudia el concepto de punto de acumulación y su relación con los limites. |

[SECCIÓN 3] 1.1.1 Limites laterales:

Cuando se quiere calcular el limite de una función en un punto o número real , se consideran las imágenes de valores cercanos tanto a la derecha del número como a la izquierda de y se busca una tendencia, pero es posible que al analizar las imágenes se observe una tendencia en las imágenes de los valores que se encuentran a la derecha de y una tendencia diferente cuando se analizan las imágenes de los valores que se encuentran a la izquierda de .

Si se considera

se tiene al tomar valores cercano a que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se observa que dos tendencias, por un lado las imágenes de valores cercanos a por la izquierda tienden a y las imágenes de los valores cercanos a por la derecha tienden a , comportamiento que se refleja en la grafica de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del -1 se aproximan a y las imágenes de valores a la izquierda del -1 se aproximan a -2 |

Por supuesto el limite cuando tiende a de la función no existiría ya que no hay una única tendencia, sin embargo, como hay una tendencia tanto por derecha como por izquierda describiremos estos comportamientos como limites laterales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite lateral derecho** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a **derecha** de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **por la derecha** de las imágenes por la función , **no existe**. |

De manera similar se define:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite lateral izquierdo** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a **izquierda** de un numero real y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **por la izquierda** de las imágenes por la función , **no existe**. |

En el ejemplo anterior se tiene entonces que:

como se ve en este ejemplo los limites laterales pueden existir en un punto o valor dado sin que el limite exista, en estos casos sucede por que los limites laterales no son los mismos, pero si los limites laterales coinciden inmediatamente existe el limite, por lo que se establece la siguiente propiedad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema de:** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores tan aproximados como se quiere a de un numero real entonces,  si y solo si  además en estos casos se tiene que: |

Por ejemplo si se estudia las función cerca del punto se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

En algunas ocasiones cuando un limite de una función en un punto es cero, es conveniente saber si las imágenes se están acercando a cero por la derecha o por la izquierda, en este ejemplo se observa que cuando tomamos valores a la izquierda de las imágenes se acercan a y lo hacen por la izquierda y cuando tomamos valores a la derecha del las imágenes se acercan a por su derecha, si se desea se puede especificar este comportamiento en la notación de limite de la siguiente manera:

Si se considera la función dada por la grafica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -4 resaltando los valores del rango y etiquetando la función como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de el limite es cero |

Al analizar la función alrededor de se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

como se corrobora en la grafica de la función:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | ampliado cerca de 0 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de las imágenes de valores a la derecha del 0 se van a infinito y las imágenes de valores a la izquierda del 0 se van a menos infinito. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota horizontal , ya que al evaluar la función en cero, el numerador no era cero pero el denominador si, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota vertical** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota vertical** la recta si y solo si se tiene que existen valores del dominio de tan cercanos a como se quiera y se cumple una o varia de las siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando alrededor de , hay que tener en cuenta que a la izquierda de la función esta dada por la expresión y a la derecha de es :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

de donde:

entonces a función tiene como asíntota vertical la recta , a pesar de que .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | ampliado cerca de -1 y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asintota horizontal |

Los limites laterales permiten analizar el comportamiento de las imágenes cerca de un punto aun cuando solamente es posible acercarse por derecha o solo por izquierda, por ejemplo si se considera la función que tiene por domino , por lo tanto, no tiene sentido hablar del limite cuando tiende a ya que no es posible calcular imágenes de valores cercanos por la derecha, pero como si es posible acercarnos por izquierda se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Se observa que las imágenes son negativas y en valor absoluto van haciendo cada vez más grandes, luego:

por lo que la función tiene asíntota horizontal .

De manera similar en no es posible calcular el limite porque no estudiar las imágenes de valores próximos a la izquierda de , pero si de valores próximos a por derecha, se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

de donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | ampliado en el intervalo (-1.5, 1.5) y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene como asintota horizontal y las imágenes de valores cercano a por derecha se acercan a cero por derecha. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Limites laterales. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite o los limites laterales de una función en un punto a partir de tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.2 Limites en el infinito

De manera similar a cuando se estudia el comportamiento de las imágenes por una función de algunos valores cercanos a un número real , se puede estudiar el comportamiento de las imágenes cuando tomamos valores que se hagan infinitamente grandes, ya sean positivos o negativos, y observar si las imágenes de estos valores se aproximan a algún número real o se vuelven cada vez infinitamente más grandes; por lo que la noción intuitiva de limite al infinito es similar a la definición de limite de función en un punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

De manera similar:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definción intituitiva de limite al menos infinito** |
| **Contenido** | Si esta definida para valores negativos en valor absoluto infinitamente grandes y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real entonces se dice que el limite cuando tiende a **menos** **infinito**  de las imágenes por la función es , y se denota como :  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son positivas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es infinito, y se denota como:  si las imágenes no se aproximan a ningún valor, pero se hacen en valor absoluto infinitamente más grandes y son negativas diremos que el limite cuando tiende **menos** **infinito** de las imágenes por la función es menos infinito, y se denota como:  si ninguno de los casos aneriores ocurre diremos que el limite cuando tiende a **menos** **infinito** de las imágenes por la función , **no existe**. |

Por ejemplo si se considera la función , evaluada en valores positivos que se van haciendo infinitamente grandes (tienden a infinito) o en valores negativos que en valor absoluto se hacen infinitamente grandes (tienden a menos infinito), se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

En ambos casos se observa que las imágenes se están acercando a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagens de la función en el infinito y en el menos infinito tiende a cero. |

Si se considera la función se tiene que:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Se observa que las imágenes de valores que se tienden al infinito son negativos y en valor absoluto se van haciendo infinitamente grandes, y las imágenes de los valores que tienden a menos infinito son positivas y también se van haciendo infinitamente grande, de donde:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imágenes de la función en el infinito tiende a menos infinito y en el menos infinito tiende a infinito. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Como era de esperarse la función oscila entre menos y por eso ni en el infinito y ni en el menos infinito muestra alguna tendencia:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito no muestran ninguna tendencia. |

Si se considera la función

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG14 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las imagnes de la función en el infinito y en el menos infinito tienden a cero. |

En el capitulo de funciones se mencionaba que la función racional tenia una asíntota vertical , por que el grado del numerador es menor que el del denominador, a continuación se presenta la definición exacta de cuando cualquier función (no solamente las racionales) tienen una asíntota horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de asintota horizontal** |
| **Contenido** | Una funión tiene como **asintota horizontal** la recta si y solo si se tiene que cumple una o las dos siguientes condiciones: |

Si consideramos la función

analizando los limites al infinito y a menos infinito teniendo en cuenta que para valores negativos infinitamente grande la función esta dada por la expresión y para positivos por :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

de donde:

entonces la función tiene dos asíntotas horizontales la recta y la recta .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG15 |
| **Descripción** | comprimida hacia el eje Y y resaltando los valores del rango. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | la función tiene dos asíntotas horizontales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Limites en el infinito. |
| **Descripción** | Actividad en que se practica como identificar el limite de una función en el infinito por tabulación o su grafica. |

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Definición formal de limite |
| **Descripción** | Interactivo en el se explica el concepto formal de limite y la necesidad de este. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Limites de las principales funciones |
| **Descripción** | Interactivo en el que partir de la grafica se estudian los limites de algunas funciones que resultan ser base para el calculo de otros limites. |

[SECCIÓN 1] 2. Propiedades de los limites

Hasta ahora para poder calcular el limite de una función en un punto (o en el infinito), se debe o bien conocer la grafica de una función o poder calcular fácilmente las imágenes por la función de valores cercanos al número (o que tiendan al infinito) que se conoce como tabular, pero esta no siempre es una tarea fácil de hacer en especial si no se cuenta con una calculadora o computador, por esta razón se hace necesario establecer algunas reglas que faciliten el calculo de limites, entre ellas las propiedades.

Las propiedades de los limites relacionadas con las operaciones de funciones, cuando se conoce de antemano los limites de dos funciones en un punto (o en el infinito), es posible conocer en la mayoría de casos los limites de las funciones que se obtienen al operar estas dos funciones, es decir el limite de la suma, del producto y del cociente.

[SECCIÓN 2] 2.1. Suma de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del limite de una suma** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces |

Estas mismas propiedades se tienen para **limites laterales** y **limites en el infinito.**

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que (ya que es una función constante) y entonces por la propiedad b. de suma de limites (aplicadas a limites laterales)

ahora como se sabe que y entonces por la propiedad c. de suma de limites aplicada a limites laterales,

por ultimo como los limites laterales son diferentes entonces se concluye que:

Ejemplo 2. Calcular:

como se sabe que y entonces por la propiedad a. de suma de limites

Ejemplo 3. Calcular

Se tiene que y como se sabe que y entonces por la propiedad a. de suma de limites (aplicado a limites en el infinito)

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC80 |
| **Título** | Propiedades del limite de la suma |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las propiedades de limite de la suma. |

[SECCIÓN 2] 2.2. Producto de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del limite de un producto** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces 7. Si y entonces 8. Si y entonces |

Estas mismas propiedades se tienen para **limites laterales** y **limites en el infinito.**

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la propiedad b. de producto de limites (aplicadas a limites en el infinito)

Ejemplo 2. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que entonces por la propiedad a. de producto de limites

Ejemplo 3. Calcular :

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la propiedad e. de suma de limites

Ejemplo 4. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la propiedad a. de producto de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC90 |
| **Título** | Propiedades del limite del producto |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las propiedades de limite del producto. |

[SECCIÓN 2] 2.3. Cociente de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del limite de un cociente** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces   .   1. Si y entonces 2. Si y entonces   .   1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces |

Estas mismas propiedades se tienen para **limites laterales** y **limites en el infinito.**

Ejemplo 1. Calcular:

Se tiene que:

y como se sabe que y entonces por la propiedad a. de cociente de limites

Ejemplo 2. Calcular:

Como se sabe que y entonces por la propiedad d. de cociente de limites (aplicada a limites laterales)

Ahora como se sabe que y entonces por la propiedad e. de cociente de limites (aplicada a limites laterales)

Como los limites laterales no coinciden entonces:

Ejemplo 3. Calcular :

Como se sabe que y entonces por la propiedad c. de suma de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC100 |
| **Título** | Propiedades del limite del cociente |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las propiedades de limite del cociente. |

[SECCIÓN 2] 2.4. Composición de limites

En el caso de las propiedades de los limites asociados con suma, producto y cociente de funciones, para calcular el limite se debe conocer el limite de las dos funciones calculados en el mismo punto, pero la composición no actúa de esa manera, cuando se compone se halla la imagen de la imagen, por lo tanto para calcular el limite de una composición en un punto debemos conocer el limite de la primera función que aplicamos en ese punto y el limite y si este existe conocer el limite de la segunda función que aplicamos pero **calculado en el limite de la primera.** De manera más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Porpiedades del limite de una ciomposición** |
| **Contenido** | 1. Si y entonces 2. Si y entonces 3. Si y entonces 4. Si y entonces 5. Si y entonces 6. Si y entonces |

Estas mismas propiedades se tienen para **limites laterales** y **limites en el infinito.**

Antes de ver algunos ejemplos, es necesario aclarar que para los casos a. y b. si es importante observar si el limite es alcanzando por un solo lado o por ambos es decir:

Si entonces el limite en lo calculamos es decir .

Si entonces el limite en lo calculamos es decir .

Si pero se acumula por ambos lados entonces el limite en lo calculamos en es decir Si entonces el limite en lo calculamos es decir .

Ejemplo 1. Sean y calcular:

como entonces se **calcula el limite de la función en**  y entonces por la propiedad b. de composición de limites (aplicado a limites laterales)

Ejemplo 2. Calcular:

Si consideramos y tenemos que:

y como entonces se **calcula el limite de la función en**  y entonces por la propiedad a de composición de limites (aplicado a limites en el infinito)

Ejemplo 3: Sean y calcular:

como entonces se **calcula el limite de la función en**  y entonces por la propiedad d. de composición de limites

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC110 |
| **Título** | Propiedades del limite de la composición |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las propiedades de limite de la composición. |

[SECCIÓN 2] 2.5 Regla de sustitución

Aunque no siempre la imagen de la función en un punto coincide con el limite calculado en ese punto gracias a las propiedades de los limites podemos establecer los casos en los que si teniendo en cuenta en que funciones básicas los limites coinciden con la imagen. Por ejemplo si se quiere calcular:

Se puede usar que luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de producto de limites:

como y luego por propiedad de suma de limites:

como y luego por propiedad de suma de limites:

y finalmente por cociente de limites

es decir que en este caso el limite y la imagen coinciden, de forma similar pasa con las funciones que esta definidas en el punto es decir que tienen imagen y alrededor de el las imágenes se obtienen por la misma regla, de forma más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla de sustitución por evaluación de limite en un punto** |
| **Contenido** | Sea una función si existe número real positivo , tal que esta en el dominio de y en este intervalo la función **no se define a trozos** y esta dada por una única expresión analitica entonces:  Si esta misma condición se tiene pero para el intervalo entonces:  Si esta misma condición se tiene pero para el intervalo entonces: |

En otras palabras para usar la regla de la sustitución por evaluación debemos verificar que la función cerca al punto no tenga problemas de dominio y que además no este dada por trozos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | En general en las funciones reales los problemas de dominio se obtienen por tres motivos [VER]:   * División por cero * Logaritmo de no positivos   Raíces de índice par de negativos. |

Ejemplo 1. Calcular:

Para este caso en la función tenemos problemas de división por cero en , por lo que podemos asumir que muy cerca de no hay problemas de dominio, además como la función no es a trozos entonces:

Ejemplo 2. Calcular:

Esta función tienen por dominio por lo que alrededor de 2 no tiene problemas de dominio, además en el intervalo no esta dada por trozos, por lo tanto,

Ahora como las condiciones se cumplen en se puede calcular por evaluación el limite a la derecha de

como ya se había visto.

Ejemplo 3:

Esta función tiene problemas de dominio en luego alrededor de no hay problemas de dominio sin embargo alrededor de la función parte entera esta definida a trozos por lo que en este caso no se puede usar la regla de evaluación, sin embargo si podemos usar las propiedades de los limites para calcularlo:

Sea y entonces

como y entonces por propiedades de composición de limites:

como y entonces por propiedades de composición de limites:

entonces el limite no existe a pesar de que la imagen de es .

Ejemplo 4. Las funciones polinómicas no están definidas a trozos y tienen por domino todos los reales, luego :

Ejemplo 5. Las funciones racionales no están definidas a trozos y tienen por dominio los reales tales que el polinomio del denominador no se hace cero, luego:

siempre y cuando .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC120 |
| **Título** | Regla de sustitución por evaluación |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica identificar las condiciones necesarias para usar la regla de sustitución por evaluación. |

[SECCIÓN 2] 2.6. Consolidación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculo de limites por propiedades. |
| **Descripción** | Actividad en la que se práctica como calcular el limite de de funciones usando las diferentes propiedades de limites y la regla de evaluación. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Limites en el infinito de funciones algebraicas. |
| **Descripción** | Interecativo en el que se estudian como calcular los limites en el infinito de cualquier función algebraica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asintotas horizontales de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica identificar las asintotas horizontales de una función via limites |

[SECCIÓN 1] 3. Limites Indeterminados

Si se observan las tablas de propiedades de limites de las operaciones de dos funciones, no dice que sucede cuando uno o ninguno de los dos limites no existen, además faltan expresar lo que sucede en algunos casos en la suma en el producto o en el cociente. Estos limites que se consideran **limites indeterminados**, se llaman así porque no se sabe con certeza si el limite existe o no, y en caso de que se exista cual es, esto depende de cada caso particular.

[SECCIÓN 2] 3.1. Indeterminación de suma de limites

Con la suma se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de limites** |
| **Contenido** | * Si y entonces   se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Ejemplo 1. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego la suma es indeterminada pero en este caso tenemos que:

[SECCIÓN 2] 3.2. Indeterminación de producto de limites

Con el producto se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el producto de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del producto de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Ejemplo 1. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego el producto se indeterminada pero en este caso tenemos que:

[SECCIÓN 2] 3.3. Indeterminación de cociente de limites

Con el cociente se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciónes en el cociente de limites** |
| **Contenido** | Para el caso del cociente de limites aparecen dos indeterminaciones   * Si y entonces   se considera indeterminado.   * Si y entonces     se considera indeterminado. |

Igual sucede con los limites laterales y al infinito.

Las indeterminaciones como cociente son las más importantes, por lo general en las indeterminaciones de suma y producto se suelen realizar procesos algebraicos para convertirlos en un caso de cociente (ejemplo 3 de suma y 2 y 3 de producto).

Ejemplo 1. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 2. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

Ejemplo 3. Se tiene que y luego el cociente se indeterminada pero en este caso tenemos que:

pero este último no existe.

Los procesos algebraicos son la clave para solucionar las indeterminaciones, en especial la factorización, la racionalización y multiplicar por funciones cuyo limite en el punto sean 1, por ejemplo:

es una indeterminación , se puede resolver de la siguiente manera:

y como vimos en la sección 2 y por la regla de sustitución por evaluación se tiene que: , finalmente por producto de limites:

**También existen las indeterminaciones exponenciales pero estas serán trabajadas más adelante.**

[SECCIÓN 2] 3.4 Consolidación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Limites indeterminados de funciones algebraicas. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como resolver la indeterminación para algunas funciones algebraicas.. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Algunos limites trigonometricos indeterminados. |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia como resolver la indeterminación para algunas funciones trigonometricas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC180 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Calculando limite de indeterminaciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como calcular algunos limites indeterminados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Asintotas verticales de funciones. |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica identificar las asintotas horizontales de una función via limites |

[SECCIÓN 1]**5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Competencias: Concepto y calculo de Limites. |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerza lo aprendido sobre el calculo de limites. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC210 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema de limites. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |